

令和5年度 一般選抜 A 個別方式 (第1期)

数 学

「数学Ⅰ・数学Ⅱ」 解答

1.

問1 (ア) $(x+y)(x-y)(y-z)$ (イ) 35

問2 (ウ) -1 (エ) 3

問3 (オ) $-(x-2)^2+6$ あるいは $-x^2+4x+2$ (カ) $2 \leq y \leq 6$

問4 (キ) $\frac{2S}{lm}$

問5 (ク) 1

問6 (ケ) 正の相関 (コ) 相関係数

2.

問1 (ア) $-3-2i$ (イ) $24-31i$

問2 (ウ) -2 (エ) 1

問3 (オ) $\sqrt{7}$ (カ) $-\sqrt{7}$

問4 (キ) 3 (ク) $\frac{1}{27}$

問5 (ケ) $x^2+y^2+2x-4y$ (コ) 点 $(-1, 2)$ を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の円

3. (解答例)

問1 点 A の座標は

$$x=2\cos 60^\circ=2\times\frac{1}{2}=1, \quad y=2\sin 60^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

より, $(1, \sqrt{3})$ である。

問2 直線 OA は 2 点 $O(0, 0)$, $A(1, \sqrt{3})$ を通るので

$$y-0=\frac{\sqrt{3}-0}{1-0}(x-0) \text{ より, } y=\sqrt{3}x$$

問3 接線 m と直線 OA は垂直であり, OA の傾きが $\sqrt{3}$ なので, m の傾きは $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

である。 m は点 $(1, \sqrt{3})$ を通るので, m の方程式は

$$y-\sqrt{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \text{ より, } y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

問4 接線 m と座標軸との交点が $(4, 0)$ と $(0, \frac{4\sqrt{3}}{3})$ であるから,

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \quad \text{となる。}$$

S_2 は、半径 2 の円を 4 等分してできる 1 つの部分の面積なので、

$$S_2 = \frac{1}{4} \times \pi \times 2^2 = \pi \quad \text{となる。}$$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi}{8\sqrt{3}/3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{8}$$

4. (解答例)

問 1 放物線は直線 $x=1$ に関して対称であるから、点 B は原点 O と点 (1,0) の間にある。よって、 $0 < x < 1$ となる。

$$S(x) = BC \times AB = (OC - OB) \times AB$$

$$= \{(2-x) - x\} (-x^2 + 2x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x$$

となる。

問 2 $S'(x) = 6x^2 - 12x + 4 = 2(3x^2 - 6x + 2) = 0$ より、 $S'(x) = 0$ の解は

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 3 \times 2}}{3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

であるから、 $0 < x < 1$ において、 $S(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	...	$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$	...	1
$S'(x)$		+	0	-	
$S(x)$			極大		

$S(x)$ の極大値は、 $S(x) = 2x(1-x)(2-x)$ を用いて

$$\begin{aligned} S\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) &= 2 \times \frac{3-\sqrt{3}}{3} \times \left(1 - \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) \left(2 - \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= 2 \times \frac{3-\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{3+\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}(3^2-3)}{3^3} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

$\therefore S(x)$ は、 $x = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$ のとき最大値 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ をとる。

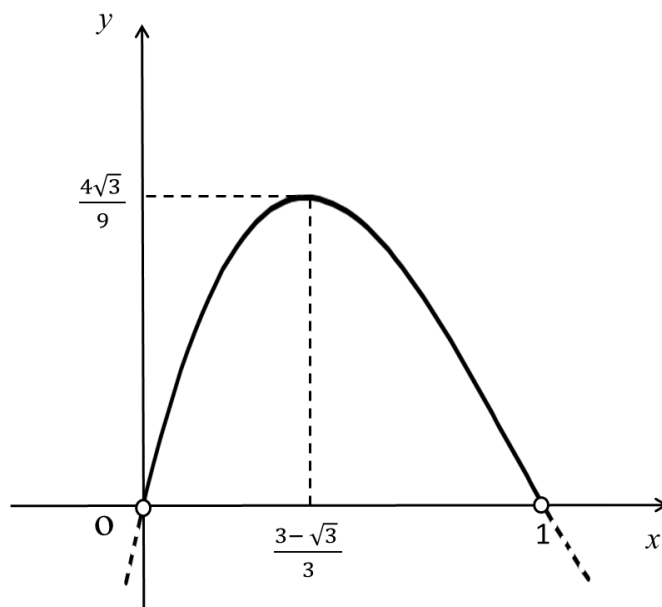
問 3 以下の事項が何らかの形で表現されていれば満点とする。

<作図上のポイント>

- x , y , 原点 O の表示がある。
- 放物線の頂点の x 座標, y 座標の表示がある。
- グラフの両端は原点 O と点 (1,0) であり、両端を含まない。

・滑らかな曲線が 3 次関数のグラフの一部として描かれている。

・ $\frac{3-\sqrt{3}}{3} < \frac{1}{2}$ が読み取れる。



問 4 $S(x)$ の最大値を S_1 ，放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を S_2 とする。

$$S_1 = \frac{4\sqrt{3}}{9} \quad (\text{問 2 より})$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^1 (-x^2 + 2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$S(x) + T = S_2$ (=定数) より， T が最小となるのは $S(x)$ が最大となるときなので，

$$T \text{ の最小値} = S_2 - S_1 = \frac{4}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{9} = \frac{4(3-\sqrt{3})}{9}$$

である。